

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa finală

Iași, 17 Aprilie 2006

CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie M o mulțime cu n elemente și $\mathcal{P}(M)$ mulțimea părților sale. Să se determine funcțiile $f : \mathcal{P}(M) \longrightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}$, cu proprietățile:

- a) $f(A) \neq 0$, pentru $A \neq \emptyset$;
- b) $f(A \cup B) = f(A \cap B) + f(A \Delta B)$, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(M)$, unde $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Subiectul 2. Să se arate că, dacă $a, b \in (0, \frac{\pi}{4})$, atunci

$$\frac{\sin^n a + \sin^n b}{(\sin a + \sin b)^n} \geq \frac{\sin^n 2a + \sin^n 2b}{(\sin 2a + \sin 2b)^n}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Subiectul 3. Să se demonstreze că printre termenii șirului definit prin $a_n = [n\sqrt{2}] + [n\sqrt{3}]$, $n \in \mathbb{N}$, există o infinitate de numere pare și o infinitate de numere impare.

Subiectul 4. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se determine n mulțimi A_i , $1 \leq i \leq n$, din plan, disjuncte două câte două, astfel încât:

- a) pentru oricare cerc \mathcal{C} din plan și oricare $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, avem $A_i \cap \text{Int}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$;
- b) pentru orice dreaptă d din plan și oricare $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, proiecția mulțimii A_i pe d nu coincide cu d .